MATEMÁTICA DISCRETA II
SEGUNDO CONTROL

Ejercicio 1 (15 ptos.)

Un grupo de amigos quiere visitar dos ciudades P y Q.

En la ciudad P los lugares turísticos de mayor interés, las carreteras entre los mismos y el tiempo en minutos que es necesario para desplazarse de un lugar a otro vienen dados por la siguiente tabla:

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		21			60	20		
b	21		22	30				19
c		22		40		41		28
d		30	40		28			50
e	60			28		21		26
f	20		41		21		25	23
g						25		
h		19	28	50	26	23		

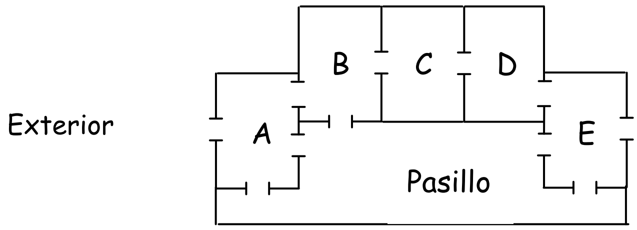
En la ciudad Q los lugares interesantes y los caminos que los unen están representados por el grafo cuya lista de adyacencia es:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	3	0	1	0	1
3	2	3	2	5	4	5	2	3
5	6	7	4		6	7	6	5
7	8		8		8		8	7

a) Encontrar en la ciudad P los itinerarios que conectan la plaza **a** con todos los lugares de interés utilizando el menor tiempo posible.

b) Estudiar, razonadamente, si es posible encontrar un ciclo hamiltoniano en la ciudad Q.

c) En un museo de arte de la ciudad P se ha ordenado la exposición que actualmente presenta en cinco salas, como muestra la figura:



¿Existe alguna forma de recorrer la exposición de modo que se pase por cada puerta sólo una vez y se vuelva al punto de partida? En caso afirmativo, trazar el recorrido y en caso negativo, trazar un recorrido, que empiece y termine en el exterior del museo, en el que exista un mínimo número de puertas por las que haya que pasar dos veces.

Solución

a) Para obtener el camino más corto desde el vértice A a todos los demás vértices aplicamos el algoritmo de Dijkstra: El árbol de caminos mínimos desde A es: T = {ab, bh, af, fe, bc, fg, bd}

a	b	c	d	e	f	g	h
0	21	∞	∞	60	20	∞	∞
	21	61	∞	41		45	43
		43	51	41		45	40
		43	51	41		45	
		43	51			45	
			51			45	

MATEMÁTICA DISCRETA II

b) Es un grafo bipartido: V = {0, 2, 4, 6, 8} ∪ {1, 3, 5, 7}, no existe camino hamiltoniano cerrado.

c) d = [4, 3, 2, 2, 4, 5, 2], tiene dos vértices impares, entonces no existe camino euleriano cerrado; pero existe un camino euleriano cerrado mínimo:

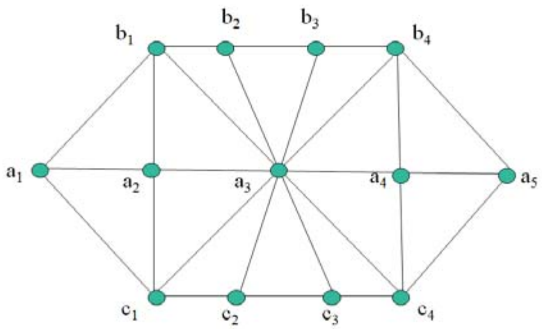
C = {Exterior, [A, P, E, P, A], B, P, B, C, D, E, Exterior}

Ejercicio 2 (10 ptos.)

a) Indicar razonadamente cuál es el número cromático del grafo de la figura. Obtener una coloración de vértices con el mínimo número de colores, aplicando el algoritmo de Brelaz.

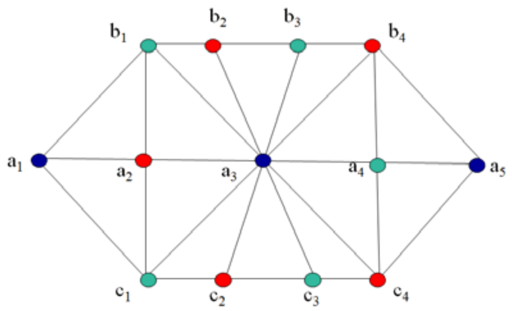
b) Obtener una coloración de aristas del grafo de la figura, utilizando el mínimo número de colores.

c) Hallar el polinomio cromático del subgrafo cuyo conjunto de vértices es $\{b_2, b_3, a_3, c_2, c_3\}$.

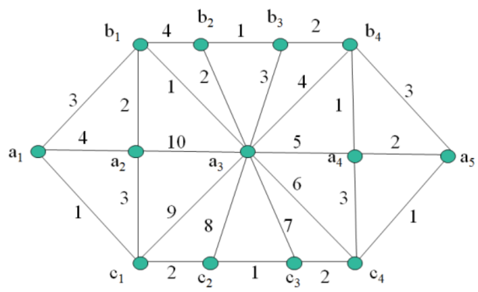


Solución

a) $\chi(G) = 3$. No puede ser inferior ya que el grafo tiene ciclos impares.



b) $\chi_1(G) \geq \Delta(G) = 10$. Existe una coloración con 10 colores, entonces $\chi_1(G) = 10$.



c) $P(H,k) = k(k-1)^2(k-2)^2$

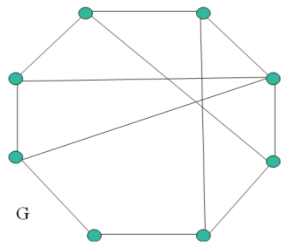
Ejercicio 3 (10 ptos.)

a) D = [5, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2] es la sucesión de grados de un grafo plano con dos componentes conexas, ¿cuántas caras tiene?

b) Un grafo plano conexo no contiene ciclos de longitud inferior a 6. Si tiene 70 caras, ¿cuántos vértices tiene?

c) ¿Es planar el grafo G de la figura? Justificar la respuesta.

MATEMÁTICA DISCRETA II
SEGUNDO CONTROL



Solución

a) q = 22, n = 16 y como el grafo no es conexo, entonces $c > 2 + q - n = 8 \Rightarrow c = 9$

b) c = 70, $\delta(c) \geq 6 \Rightarrow q = \frac{1}{2}\sum \delta(c) \geq 210 \Rightarrow n = 2 + q - c \geq 142$

c) No es planar ya que G contiene una subdivisión de $K_{3,3}$.